AE-1276

B.Sc. (Part - III)
Term End Examination, 2016-17

MATHEMATICS

Paper - II

Abstract Algebra

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक इकाई से **दो** भाग करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : **Two** parts from each unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) सिद्ध कीजिए कि समूह G में संयुग्मता का संबंध एक तुल्यता संबंध होता है।

Prove that conjugacy is an equivalence relation on a group G.

(*b*) मान लीजिए कि G एक परिमित समूह है। सिद्ध कीजिए कि G में 'a' से संयुग्मी अवयवों की संख्या G में 'a' के प्रसामान्यक का सूचक होता है।

Let G be a finite group. Prove that the number of elements conjugate to 'a' in G is the index of the normalizer of 'a' in G.

(*c*) यदि $o(G) = 56$, सिद्ध कीजिए कि G, 1 या 8, 7-सिलो उपसमूह रखता है। अंत की स्थिति में सिद्ध कीजिए कि G एक प्रसामान्य 2-सिलो उपसमूह रखता है।

If $o(G) = 56$, prove that G has 1 or 8, 7-Sylow subgroups. In the latter case, prove that G has a normal 2-Sylow subgroup.

इकाई / Unit-II

2. (*a*) यदि $f : R \to R'$ समाकारिता है, तब सिद्ध कीजिए कि f की अष्टि R की एक गुणजावली है।

If $f : R \to R'$ is a homomorphism, then prove that kernel of f is an ideal of R.

(*b*) वलय $(I_6, +6, \times 6)$ पर निम्न बहुपदों का योग और गुणन ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = 5 + 4x + 3x^2 + 2x^3$$

$$g(x) = 1 + 4x + 5x^2 + x^3$$

जहाँ $I_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Find the sum and product of the following polynomials over the ring $(I_6, +6, \times 6)$:

$f(x) = 5 + 4x + 3x^2 + 2x^3$

$g(x) = 1 + 4x + 5x^2 + x^3$

where $I_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

(*c*) किसी वलय $(R, +, \bullet)$ की दो गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ भी R की एक गुणजावली होती है। सिद्ध कीजिए।

Prove that intersection of two ideals of a ring $(R, +, \bullet)$ is an ideal of R.

इकाई / Unit-III

3. (*a*) सिद्ध कीजिए कि सदिश समष्टि $V(F)$ दो सदिश उपसमष्टियों W_1 और W_2 का सरल योग है, अर्थात $V = W_1 \oplus W_2$ यदि और केवल यदि

(*i*) $V = W_1 + W_2$

(*ii*) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Prove that the vector space $V(F)$ is a direct sum of two subspaces W_1 and W_2, i.e., $V = W_1 \oplus W_2$ iff

(*i*) $V = W_1 + W_2$

(*ii*) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

(*b*) परिमित विमीय सदिश समष्टि हेतु विस्तार प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Extension Theorem for finite dimensional vector space.

(*c*) सिद्ध कीजिए कि सदिश $\alpha_1=(1,0,-1)$, $\alpha_2=(1,2,1)$ तथा $\alpha_3=(0,-3,2)$, $V_3(R)$ का आधार बनाते हैं।

Prove that the vectors $\alpha_1=(1,0,-1)$, $\alpha_2=(1,2,1)$ and $\alpha_3=(0,-3,2)$, form a basis of $V_3(R)$.

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) सिद्ध कीजिए कि रैखिक संकारक T के भिन्न-भिन्न आइगेन मानों के संगत भिन्न-भिन्न शून्येतर आइगेन सदिशों का समुच्चय रैखिकत: स्वतंत्र होता है।

Prove that the set of distinct non-zero eigenvectors corresponding to distinct eigenvalues of linear operator T is linearly independent.

(*b*) मान लीजिए कि V field F पर एक सदिश समष्टि है और L_1 एवं L_2 समष्टि V पर रैखिक फलनक है। मान लीजिए कि एक प्रतिचित्रण $f: V \times V \to F$ को $f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha) . L_2(\beta)$ द्वारा परिभाषित किया गया है। सिद्ध कीजिए कि f, V पर एक द्वि-एकघाती समघात है।

Let V be a vector space over the field F and let L_1 and L_2 be linear functional on space V. Let a function $f: V \times V \to F$ be defined by $f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha) . L_2(\beta)$. Prove that f is a bilinear quantic on V.

(*c*) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

के आइगेन मानों और संगत आइगेन सदिशों का निर्धारण कीजिए। संगत आइगेन समष्टियों को भी लिखिए।

Determine the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Also find corresponding eigenspaces.

इकाई / Unit-V

5. (*a*) ग्राम-शिस्ट लांबिकीकरण प्रक्रम का कथन लिखकर इसे सिद्ध कीजिए।

State and prove Gram-Schmidt orthogonalization process.

(*b*) यदि α और β दो लांबिक इकाई सदिश हों, तो सदिशों α और β के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। यह भी सिद्ध कीजिए कि एक आंतर गुणन समष्टि में सदिशों का प्रसामान्य लांबिक समुच्चय रैखिकत: स्वतंत्र होता है।

If α and β are two orthonormal unit vectors, then find the distance between vectors α and β. Also prove that any orthonormal set of vectors in an inner product space is linearly independent.

(*c*) यदि α और β आंतर गुणन समष्टि $V(F)$ के कोई दो सदिश हों तो सिद्ध कीजिए कि

$$(\alpha, \beta) = Re(\alpha, \beta) + iRe(\alpha, i\beta)$$

If α and β are two vectors in an inner product space $V(F)$, then prove that

$$(\alpha, \beta) = Re(\alpha, \beta) + iRe(\alpha, i\beta)$$